Il ruolo dell'analogia nella risoluzione dei problemi

A cura di Silvia Sbaragli

27 marzo 2025 - Formazione Base e Avanzata

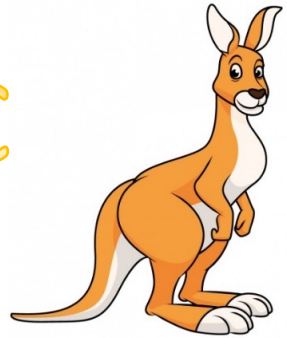
Oggi parliamo di…

- … diversi tipi di lettura di un testo matematico;
- … attenzione ai dati numerici;
- … ruolo dell'analogia per comprendere il testo di un problema.

La lettura giusta a seconda del testo e degli scopi

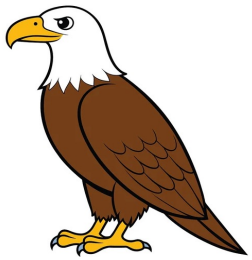
1) LETTURA ESPLORATIVA O ORIENTATIVA (*skimming*) per scoprire di quale argomento e sottoargomenti tratta il testo («a canguro»).

C



2) LETTURA SELETTIVA (*scanning*)
per cercare informazioni
e dati specifici («ad aquila»).

A





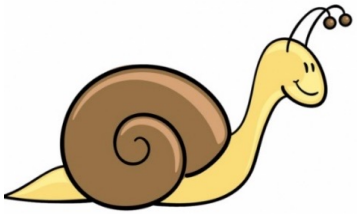
Tanner & Green (1998)

3) LETTURA ESTENSIVA per piacere.
Una lettura lineare, abbastanza veloce, frequentemente usata («a ghepardo»).



G

4) LETTURA INTENSIVA per lo studio e la comprensione profonda.
Una lettura approfondita («a lumaca»).



L

Quale *lettura* effettuano le/gli allievi per un problema?

- Una lettura a balzi («a canguro») alla ricerca di parole chiave o di dati numeri da mettere insieme con una o più operazioni.
- Modalità derivanti da prassi didattiche inefficaci e da problemi stereotipati proposti, spesso esclusivamente aritmetici.



Risolviamo i problemi

I problemi! È così difficile comprendere come risolverli, ma seguendo alcune regole fondamentali diventa tutto più semplice.

Leggi con attenzione i problemi, sottolinea la domanda, cerchia di rosso i dati, scopri le parole chiave e risolvi.

Un computer costa 1036 euro. Se pago subito 850 euro, quanto dovrò ancora pagare?

Parola chiave: .....

Calcolo: .....

Risposta: .....

L’attenzione alle parole chiave

Creare problemi dove le parole chiave influenzano al contrario.

«Giulia oggi festeggia il compleanno della sua amica Marcella.
Marcella ha 10 anni, cioè 3 anni in meno di Giulia.
Quanti anni ha Giulia?»

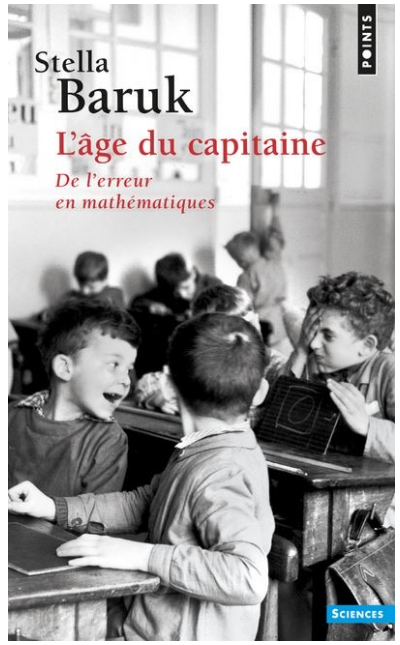
«Carlo spende 12 dei 20 euro che aveva nel borsellino.
Quanto ha ora in tutto tra monete e banconote?»

L’attenzione ai dati numerici da «mettere insieme» con un’operazione

Il problema dell’età del capitano (Baruk, 1985).

«Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».

Vi è una contraddizione tra i dati forniti e la domanda finale. È infatti impossibile calcolare l’età di un pastore se si conoscono solo gli animali che possiede.



Gli allievi tendono a rispondere 18 (12 + 6).

Recentemente è molto frequente anche la risposta 72 (12 × 6)

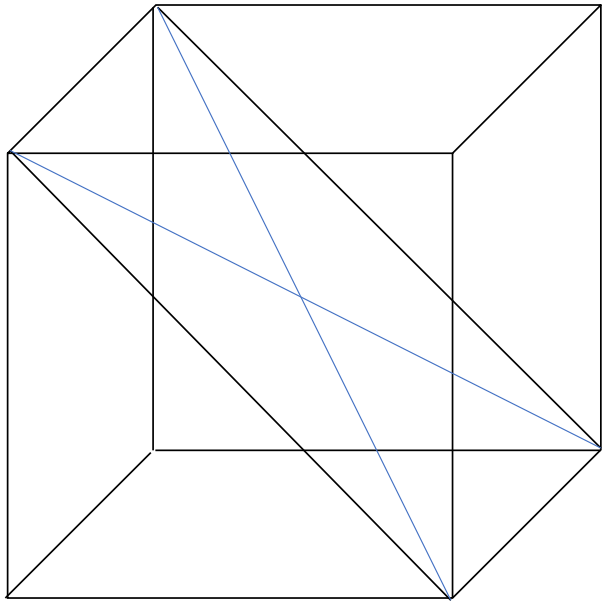
«Se fa il *pastore, deve essere vecchio*».

Interessante è questa affermazione di un allievo:

«Maestra, pensa, avevo fatto 12 : 6, ma come faceva un pastore ad avere 2 anni!» (V primaria).

Problemi non solo aritmetici

Come sono disposte tra loro due delle quattro diagonali di un cubo?



Quale *lettura* effettuare per comprendere un problema?

Si dovrebbe effettuare una lettura intensiva, basata sul cogliere il testo come un “tutto unico” dotato di senso globale, senza guardare solo i numeri o solo specifiche parole.

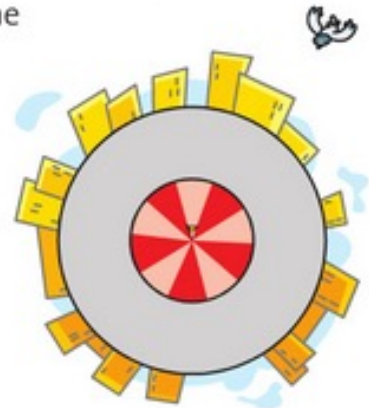
Una lettura rivolta alla comprensione profonda dell’intero testo.



Come si comporta un lettore in una lettura intensiva?

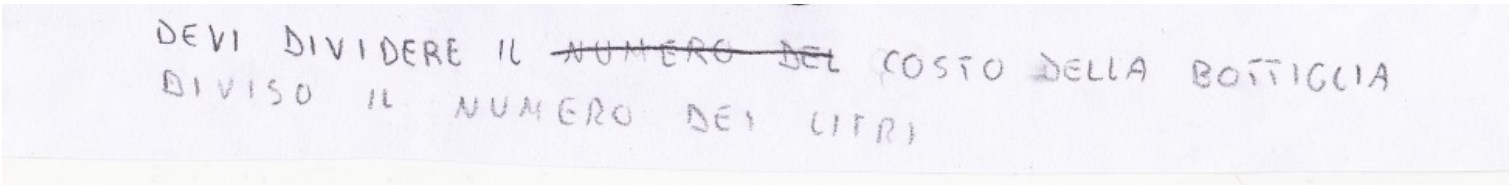
- Il lettore si sofferma sul testo e, se serve, rilegge determinate parti;
- mette in atto ipotesi, regressioni e anticipazioni per cogliere il senso;
- integra le informazioni collocate in parti diverse del testo (anche in diversi registri di rappresentazione) e le combina a informazioni extratestuali;
- valuta a fondo i significati delle parole;
- …

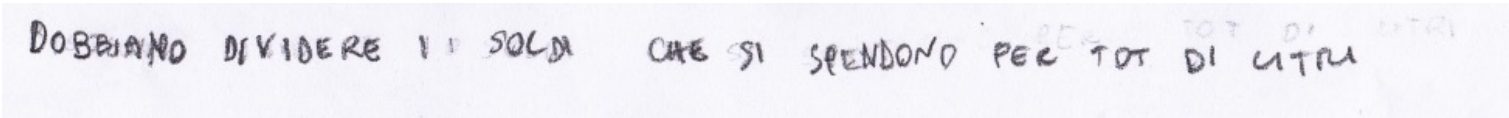
Al centro di una piazza circolare con il diametro di 100 m viene allestito il tendone di un circo con il diametro di 34 m. Qual è l’area della piazza rimasta libera?



Un’efficace modalità: coprire i dati numerici

Una bottiglia di aranciata, che contiene ■ litri, costa ■ euro. Qual è il prezzo di un litro?

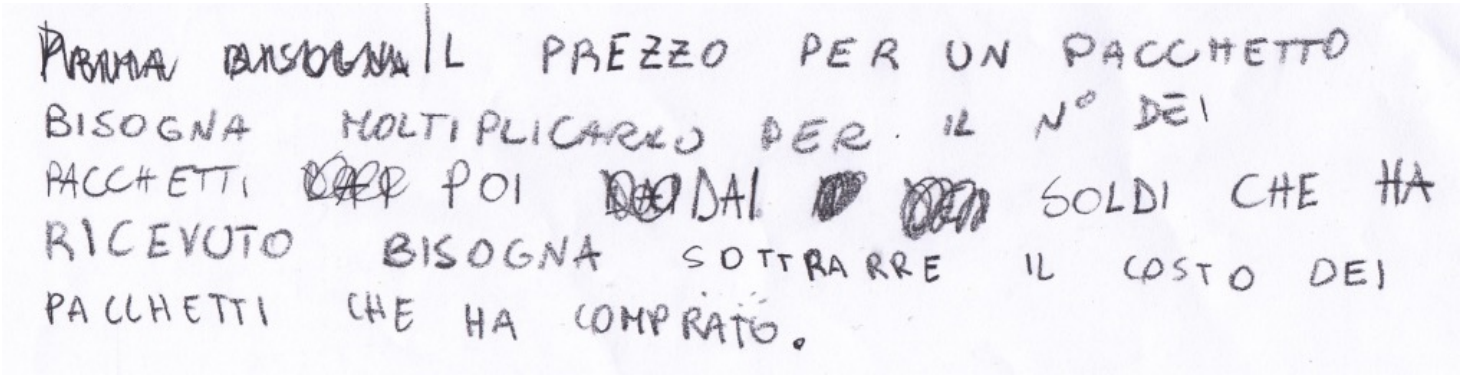




(V primaria)

Un’efficace modalità: coprire i dati numerici

Ernesto ha ricevuto dai nonni [ ] euro. Con questi soldi ha deciso di comprare [ ] pacchetti di figurine. Se ogni pacchetto costa [ ] euro, quanti soldi rimangono a Ernesto?


PRIMA BISOGNA L PREZZO PER UN PACCHETTO BISOGNA MOLTIPLICARLO PER IL N° DEI PACCHETTI POI DAI SOLDI CHE HA RICEVUTO BISOGNA SOTTRARRE IL COSTO DEI PACCHETTI CHE HA COMPRATO.

(V primaria)

Un’efficace modalità: coprire i dati numerici

Un esempio dal gruppo Matematica in rete (classe V scuola primaria):

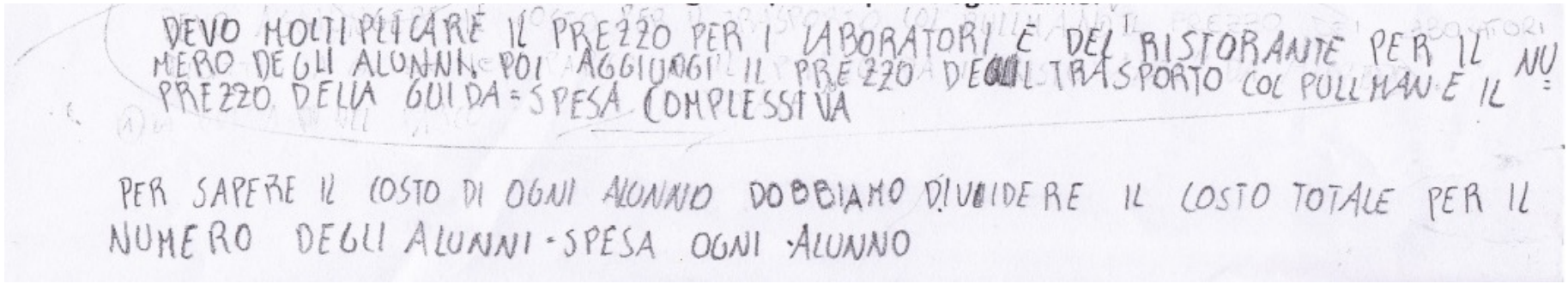
GITA AL PARCO “VERDECHIARO”

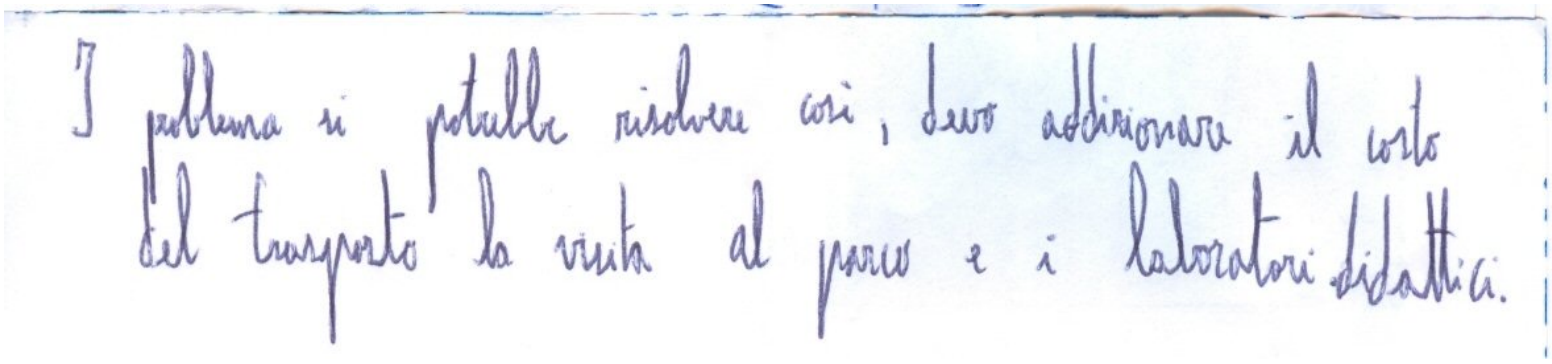
Gli insegnanti delle classi V della scuola di Boscofelice stanno prenotando per i loro  alunni una gita al parco “Verdechiaro” per un’intera giornata.

Il pullman per il trasporto costa complessivamente  . La guida del mattino per la visita al parco costa in tutto  . Il prezzo per i laboratori didattici del pomeriggio è di  per ogni alunno. Vicino al parco c’è il ristorante “Da Alfredo” dove prenotano il pranzo al prezzo di  per ogni alunno.

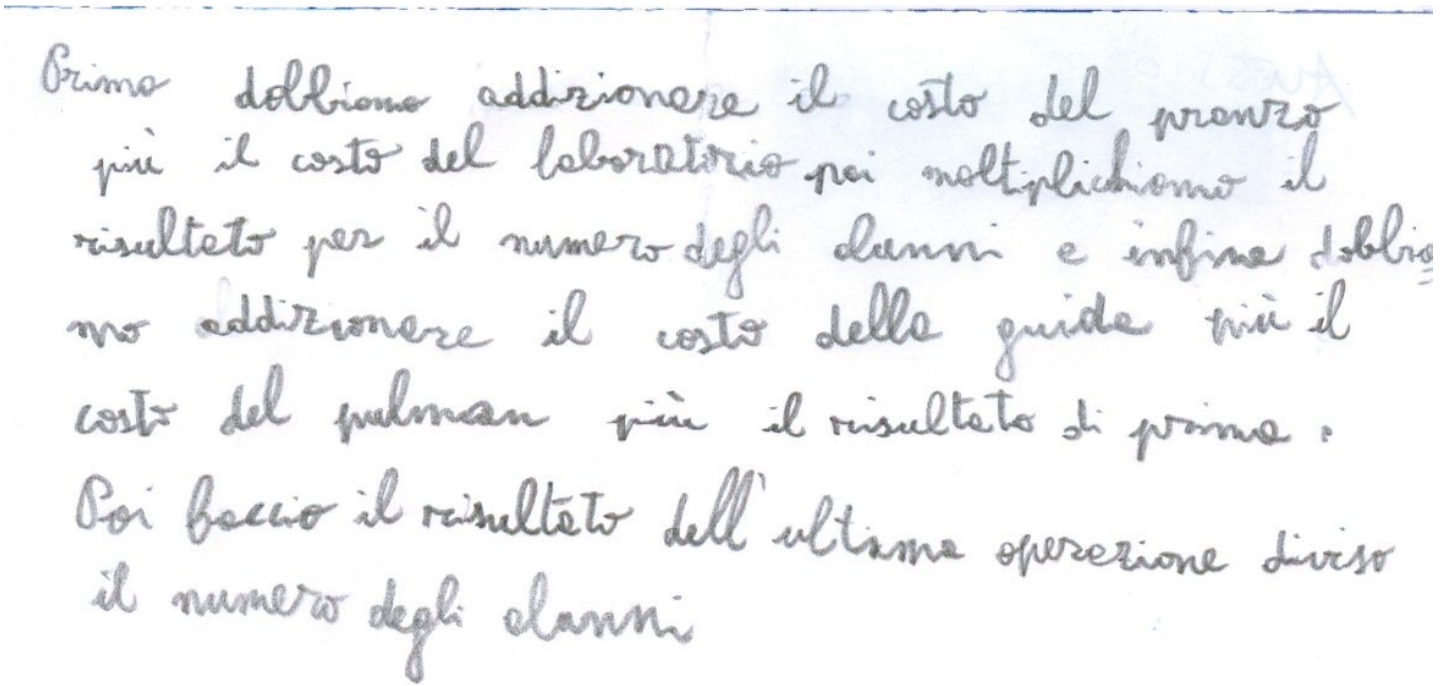
Calcola quanto costa complessivamente la gita e quanto spende ogni alunno.

Ragionamenti diversi da mettere a confronto:





(V primaria)



Prima dobbiamo addizionare il costo del pranzo più il costo del laboratorio poi moltiplichiamo il risultato per il numero degli alunni e infine dobbiamo addizionare il costo delle guide più il costo del pulman più il risultato di prima. Poi faccio il risultato dell'ultima operazione diviso il numero degli alunni

(V primaria)

Coprendo i dati:

Marco ha ricevuto una tessera omaggio che gli permette di fare [redacted] giri gratuiti sulle giostre. Ogni giro aggiuntivo dovrà pagarlo 2 franchi. Marco vuole fare [redacted] giri, quanto dovrà pagare?

Dopo aver scoperto i dati:

a. Marco ha ricevuto una tessera omaggio che gli permette di fare 10 giri gratuiti sulle giostre. Ogni giro aggiuntivo dovrà pagarlo 2 franchi. Marco vuole fare 8 giri, quanto dovrà pagare?

b. Marco ha ricevuto una tessera omaggio che gli permette di fare 10 giri gratuiti sulle giostre. Ogni giro aggiuntivo dovrà pagarlo 2 franchi. Marco vuole fare 12 giri, quanto dovrà pagare?

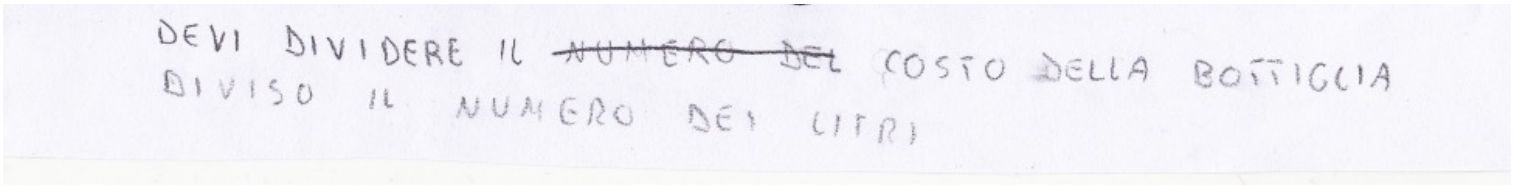
Nel caso in cui il numero di giri fatti da Marco sia minore del numero di giri gratuiti (caso a), Marco non dovrà pagare niente. Altrimenti (caso b) bisogna calcolare la differenza tra i giri fatti da Marco e quelli omaggio e moltiplicare per due. Il primo caso viene spesso trascurato dai bambini che sottraggono il numero maggiore dal numero minore, senza verificare se si tratta di giri effettuati o giri omaggio.

Sbaragli S., et al. (2021b)

Un problema illustre

Una bottiglia di aranciata, che contiene ■ *litri, costa* ■ *euro.*
Qual è il prezzo di un litro?

Una bottiglia di aranciata, che contiene 0,75 L, costa 2 dollari.
Qual è il prezzo di 1 L di aranciata? (Fischbein, 1985).



2 : 0,75

Un altro problema illustre

Su 35 allievi (13-14 anni) solo 14 hanno risposto in modo esatto (Fischbein, 1985).

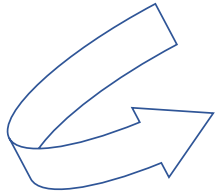
Come viene risolto?

0,75 → 3/4

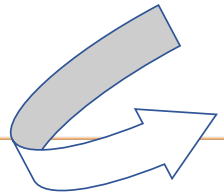
Viene eseguito un *trattamento*, ossia un cambio di rappresentazione nello stesso registro semiotico.

Per arrivare alla risposta corretta solitamente si ricorre alla relazione di proporzionalità fra il prezzo e la quantità:
quantità (1) : prezzo (1) = quantità (2) : prezzo (2)

$$0{,}75 : 2 = 1 : x$$



$$x \cdot 0{,}75 = 2 \cdot 1$$



$$x = 2 : 0{,}75$$

Una bottiglia di aranciata, che contiene 0,75 L, costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 L di aranciata?

$x = 2 : 0{,}75$

Delega formale

L'analogia per comprendere il testo

Fischbein suggerisce che, per superare l'ostacolo intuitivo creato da un problema, si possa ricorrere «a una classe di problemi collegati ad esso per analogia, ma i cui dati numerici vadano d'accordo con le richieste intuitive».

L'analogia può aiutare gli alunni a risolvere anche problemi ritenuti apparentemente difficili, evidenziando un conflitto tra la prima soluzione intuitiva e la corretta ed evidente soluzione formale.

Due problemi analoghi

Una bottiglia di aranciata, che contiene 2 L, costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 L di aranciata?

Una bottiglia di aranciata, che contiene 0,75 L, costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 L di aranciata?

Entrambi i problemi hanno esattamente la stessa struttura e richiedono la stessa operazione risolutiva.

$x = 6 : 2$

$x = 2 : 0{,}75$

«Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva» (Fischbein, 1985).

L'importanza di coprire i dati numerici.

L'analogia. Aspetti concettuali e didattici

Scrivete quale operazione risolve i problemi; spiegate anche il perché della vostra scelta.

- Una bottiglia di ▪ litri di vino costa ▪ euro.
  Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di ▪ litri di acqua costa ▪ euro.
  Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di ▪ litri di aranciata costa ▪ euro.
  Qual è il prezzo di un litro?

I tre problemi sono proposti con modalità diverse in tre classi V (A, B, C).

Tre situazioni analoghe che si risolvono con la divisione.

- Nel primo caso i numeri sono naturali e il dividendo è multiplo del divisore (pieno accordo tra aspetto intuitivo e aspetto formale);
- nel secondo caso i numeri sono ancora naturali e il dividendo è minore del divisore (non c'è accordo tra aspetto intuitivo e aspetto formale);
- nel terzo caso il divisore è un numero decimale (i tipi di numeri possono bloccare la strategia risolutiva).

Sperimentazione a)

Scrivete quale operazione risolve i problemi; spiegate anche il perché della vostra scelta.

- Una bottiglia di ▪ litri di vino costa ▪ euro.
  Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di ▪ litri di acqua costa ▪ euro.
  Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di ▪ litri di aranciata costa ▪ euro.
  Qual è il prezzo di un litro?

- Una bottiglia di 2 litri di vino costa 6 euro. Qual è il prezzo di 1 litro?

- Una bottiglia di 2 litri d'acqua costa 1 euro. Qual è il prezzo di 1 litro?

- Una bottiglia di 0,75 litri di aranciata costa 2 euro. Qual è il prezzo di 1 litro?

Tutti gli alunni hanno riconosciuto la divisione come procedura risolutiva dei tre problemi senza numeri.
I loro commenti confermano che la forma della scrittura dei testi e l'assenza dei numeri li ha aiutati a cogliere l'analogia linguistica e di conseguenza l'analogia procedurale tra le situazioni, quindi a scegliere la stessa operazione in tutti i casi.

La risposta del gruppo di Mattia è significativa:
«È una divisione che risolve ogni problema: il costo della bottiglia (cioè dei litri acquistati) diviso il numero dei litri».

Sperimentazione b)

Sono stati forniti gli stessi tre testi contemporaneamente con i numeri visibili e si è chiesto di risolverli.

Scrivete quale operazione risolve i problemi; spiegate anche il perché della vostra scelta.

- Una bottiglia di 2 litri di vino costa 6 euro. Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di 2 litri di acqua costa 1 euro. Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di 0,75 litri di aranciata costa 2 euro. Qual è il prezzo di un litro?

I testi sono stati scritti in modo da evidenziare l'analogia linguistica.

Nonostante i testi siano stati presentati contemporaneamente, gli alunni non hanno riconosciuto l'analogia linguistica e hanno considerato ogni situazione separatamente.

«Ho avuto difficoltà nel terzo problema perché non sapevo quale operazione fare (+, - , ×, :)». (Luigi)
«Il terzo è difficile perché c'è un numero con la virgola». (Giorgia)
«Nel terzo problema l'operazione non è possibile». (Marco)
«Il più facile è stato il primo perché l'operazione era facilissima». (Ilaria)

Solo Giovanni scrive: *«Per me sono tutti facili, nel terzo non ho fatto l'operazione perché non ho ancora imparato le operazioni con la virgola, però so che è una divisione».*

Nel momento della riflessione con tutta la classe, sono stati ripresentati i problemi senza numeri per fissare l'attenzione sulla disposizione delle parole in modo da far risaltare la corrispondenza tra un testo e l'altro.
Anche il problema difficile, con l'analogia, poteva essere risolto come il più facile.

Sperimentazione c)

Sono stati consegnati i tre testi con i numeri visibili uno alla volta.
Scrivete quale operazione risolve il problema; spiegate anche il perché della vostra scelta.

- Una bottiglia di 2 litri di vino costa 6 euro.
  Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di 2 litri di acqua costa 1 euro.
  Qual è il prezzo di un litro?
- Una bottiglia di 0,75 litri di aranciata costa 2 euro.
  Qual è il prezzo di un litro?

In questo caso, si sono rilevate diverse difficoltà a riconoscere analogie.

Una strategia per riflettere sulle misconcezioni

"15 amici si dividono 5 chilogrammi di pasticcini. Quanti ne spettano a ciascuno?" (D'Amore, 1999).

Lo studente, anche delle scuole superiori, è spinto a eseguire 15 : 5.

A volte si fornisce allo studente un modello intuitivo che finirà con il produrre un modello parassita: "in una divisione *a* : *b*, il dividendo deve essere maggiore del divisore".

Simona (V primaria) dopo aver risposto 15 : 5 viene intervistata e le viene chiesto di risolvere questo problema.

"3 amici si dividono 6 ettogrammi di pasticcini. Quanti ettogrammi ne spettano a ciascuno?".

Dopo averlo risolto correttamente le viene chiesto.

I: «Prova a riflettere di nuovo sul primo problema; sei ancora convinta del procedimento che avevi scelto?»

S: «Ho capito si fa 5 : 15, altrimenti divido gli amici fra i pasticcini».

I: «Perché credi di aver sbagliato la prima volta?»

S: «Forse avevo letto male o in fretta il testo del problema».

I: «Sei sicura che fosse questo il motivo?»

S: «No, credo che mi abbia ingannato questo numero (mostra il dividendo)».

I: «Perché credi che ti abbia ingannato?»

S: «Perché è più piccolo dell'altro e può ingannare».

Un'efficace strategia per lavorare sulle misconcezioni.

DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2023 (13), 71 - 89, DOI: 10.33683/ddm.23.13.4
OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una classe di seconda media

Analogy in mathematics: beliefs and competences in a seventh-grade class

Giada Bordogna
Scuola media Giubiasco – Svizzera

giada.bordogna@edu.ti.ch

Sunto / L'articolo presenta il percorso didattico svolto in una classe di seconda media con lo scopo di indagare lo sviluppo delle convinzioni e delle competenze degli allievi riguardo l'utilizzo dell'analogia nella risoluzione dei problemi di matematica. Dopo aver raccolto le convinzioni iniziali degli allievi è stato sviluppato un itinerario composto da molteplici attività finalizzato ad approfondire e rafforzare la consapevolezza degli allievi rispetto alle diverse tipologie di analogia e al loro utilizzo per facilitare la risoluzione di problemi. I risultati ottenuti mostrano come la consapevolezza degli allievi sulle diverse tipologie di analogie e sulla loro utilità sia migliorata. In particolare, essi riconoscono che saper individuare due problemi analoghi rispetto al procedimento facilita la risoluzione di situazioni nuove. Al termine del percorso si riscontra anche che la capacità di una parte degli allievi di applicare il pensiero analogico nella risoluzione dei problemi è aumentata, favorendo così l'attività di transfer di conoscenze.

Parole chiave: analogia; pensiero analogico; problem solving; strategia risolutiva; transfer di conoscenze.

Abstract / This paper illustrates the didactic itinerary performed in a 7th-grade class with the aim of investigating the development of the students' beliefs and skills regarding the use of
ter c
itiner
devel
dents
gy ar
Resul
differ
has i
how
spect
of un
ary, i
the students to apply analogical thinking in solving problems has increased, thus favoring the transfer of knowledge.

Keywords: analogy; analogical thinking; problem solving; resolution strategy; transfer of knowledge.

PROBLEMI al Centro | FORMAZIONE ViVA

https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/347/350



ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Due problemi a confronto[1]

Leggi attentamente i seguenti problemi e rispondi alle domande.

Problema A

Mario deve percorrere un tragitto di 42 km in bicicletta. Ha già percorso i $\frac{3}{7}$ di tale tragitto.
Quanti chilometri ha percorso?

Problema B

Mario ha già percorso 42 km in bicicletta, che corrispondono ai $\frac{3}{7}$ dell'intero tragitto.
Quanti chilometri è lungo l'intero tragitto?

a) In che cosa sono analoghi questi due problemi?

b) In che cosa si differenziano?

ALLEGATO PRESENTE ANCHE IN VERSIONE MODIFICABILE

Analizziamo i due problemi:

Problema A

Mario deve percorrere un tragitto di 42 km in bicicletta. Ha già percorso i $\frac{3}{7}$ di tale tragitto. Quanti chilometri ha percorso?

Conosciamo: .....

Dobbiamo trovare: .....

Problema B

Mario ha già percorso 42 km in bicicletta, che corrispondono ai $\frac{3}{7}$ dell'intero tragitto. Quanti chilometri è lungo l'intero tragitto?

Conosciamo: .....

Dobbiamo trovare: .....

Se riassumiamo i dati in una tabella, possiamo vedere ancora meglio questa differenza:

	Frazione	Intero	Parte
Problema A			
Problema B			

Gara di analogie

Abbiamo visto che esistono delle diverse **lenti di ingrandimento** che ci permettono di individuare analogie tra i problemi. Possiamo individuare almeno le seguenti lenti di ingrandimento:



Il contesto



I numeri



Il procedimento per risolvere il problema

Problemi con le frazioni

Ecco alcuni esempi di problemi con le frazioni. Riesci a trovare delle analogie e delle differenze tra di loro?

A. Marco ha letto i $\frac{3}{5}$ di un romanzo d'avventura lungo ben 325 pagine. Quante pagine gli rimangono da leggere?

B. Un automobilista ha percorso 114 km, che corrispondono ai $\frac{5}{8}$ del viaggio che deve percorrere per andare da Giubiasco a Zurigo. Quanti km è lungo l'intero tragitto?

C. Ho mangiato 9 caramelle, che corrispondono ai $\frac{3}{16}$ di una confezione. Quante caramelle conteneva la confezione?

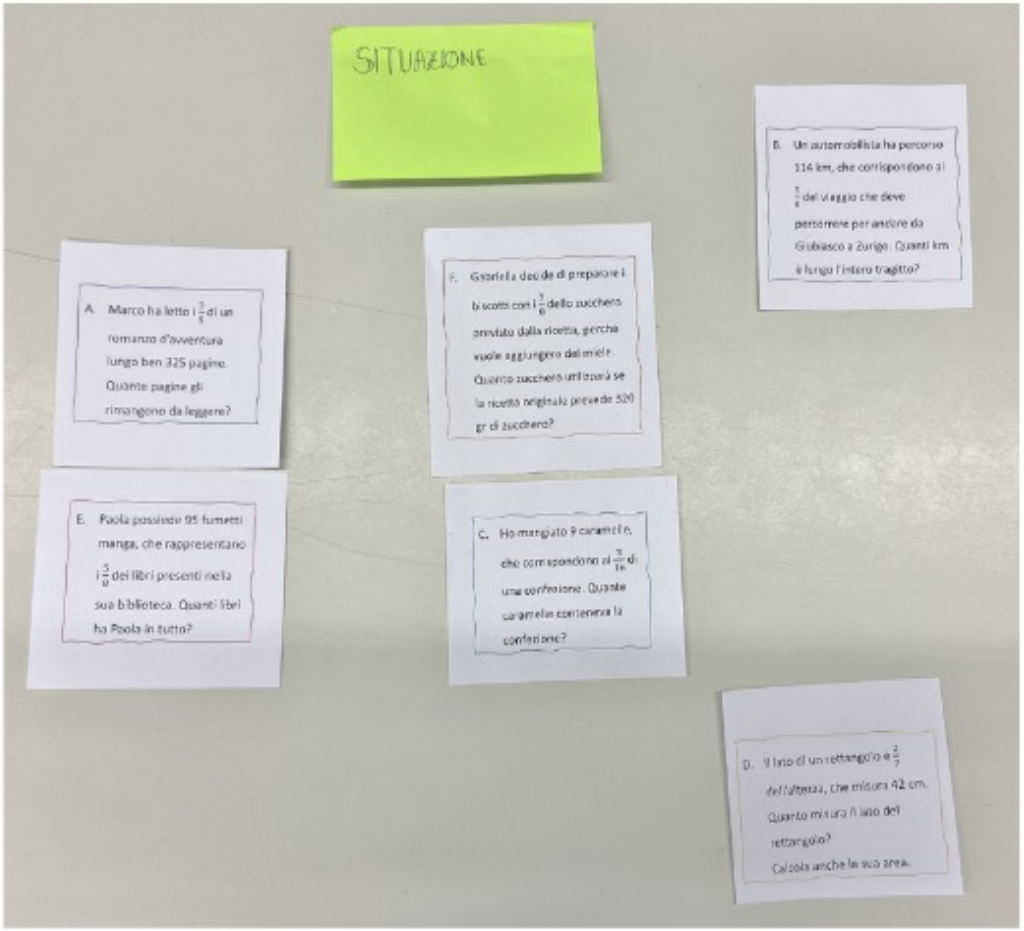
D. Il lato di un rettangolo è $\frac{2}{7}$ dell'altezza, che misura 42 cm. Quanto misura il lato del rettangolo?
Calcola anche la sua area.

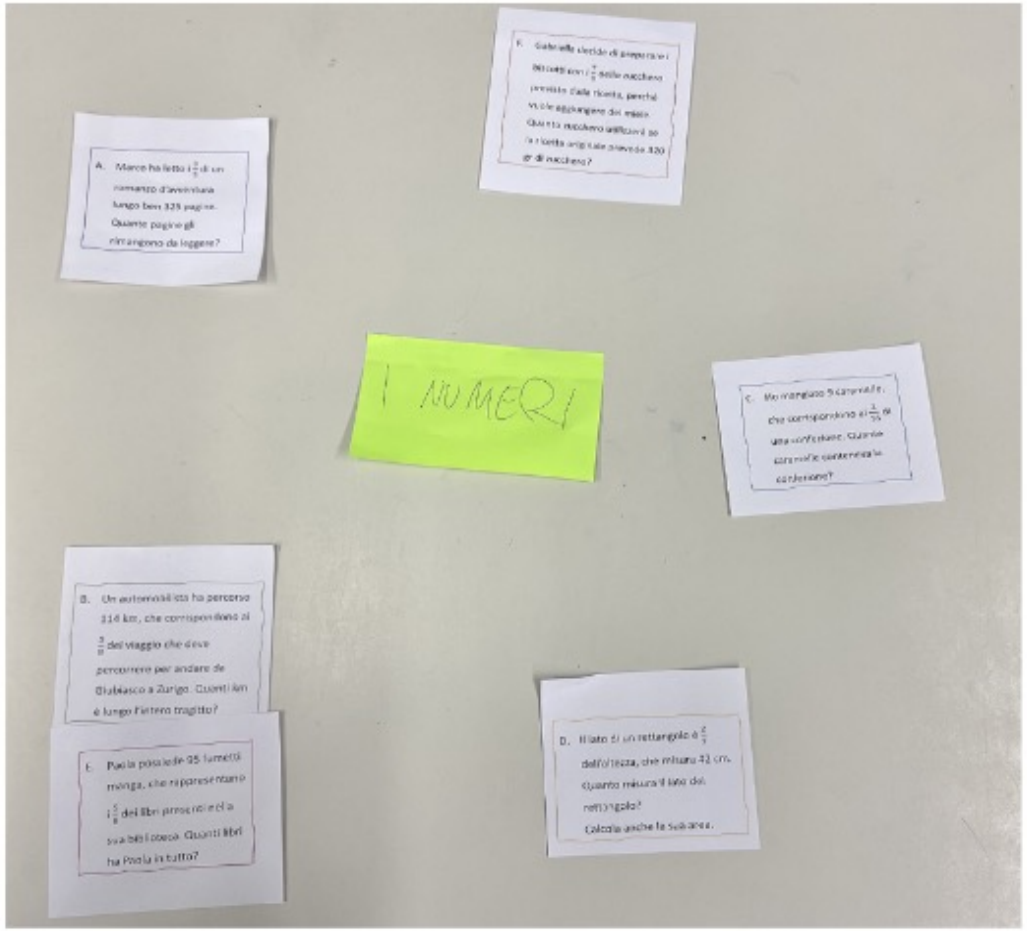
E. Paola possiede 95 fumetti manga, che rappresentano i $\frac{5}{8}$ dei libri presenti nella sua biblioteca. Quanti libri ha Paola in tutto?

F. Gabriella decide di preparare i biscotti con i $\frac{7}{8}$ dello zucchero previsto dalla ricetta, perché vuole aggiungere del miele. Quanto zucchero utilizzerà se la ricetta originale prevede 320 g di zucchero?

Analogie	Differenze

Il ruolo dell'analogia





«A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscano a inventare qualche analogia anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte tra quelle inventate».

(Speranza, 1988)

Per saperne di più

- Bordogna G. (2023). *L'analogia in matematica: convinzioni e competenze in una classe di seconda media.* In «Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula», n. 13, pp. 71 – 89. https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/347/350
- D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Fischbein E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari- In Chini Artusi L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base. Zanichelli – UMI.*
- Sbaragli S. *et alii*. (2008). *L'analogia. Aspetti concettuali e didattici*. Roma: Armando.
- Sbaragli S. (2009). *Le insidie della divisione*. In «La Vita Scolastica», n. 14, pp. 18-19.
- Sbaragli S., Demartini S. (2019). *La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo.* In «Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula», n. 5, pp. 9-43. https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/56/64
- Sbaragli S., et al. (2021a). *Lettura e comprensione del testo di un problema.* In «MaMa – matematica per la scuola elementare – Numeri e calcolo». DECS. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=374 (ultima consultazione 25/03/2025)
- Sbaragli S., et al. (2021b). *Diverse modalità di presentare un problema.* In «MaMa – matematica per la scuola elementare – Numeri e calcolo». DECS. https://mama.edu.ti.ch/materiali-didattici/materiale-didattico/?ds_id=342 (ultima consultazione 25/03/2025)
- Speranza F. (1988). Salviamo la geometria! *La matematica e la sua didattica.* 2, 3, 6-13.

Grazie dell'attenzione!



silvia.sbaragli@supsi.ch